УДК 519.8

С.О. Мащенко
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, г. Киев, Украина
Украина, 01601, г. Киев, ул. Владимирская, 64, *msomail@yandex.ru*

Обобщенная задача принятия решений в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы

S.O. Mashchenko
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
Ukraine, 01601, c. Kiev, Vladimirskaia st., 64

Generalized Problem of Decision Making in Conditions of Uncertainty with Fuzzy Set of Nature States

С.О. Мащенко
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, м. Київ, Україна
Україна, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64

Узагальнена задача прийняття рішень в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи

Рассматривается обобщенная задача принятия решений в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы. Для задания агрегированного отношения предпочтения используется операция пересечения нечеткого множества четких отношений, результатом которой является нечеткое отношение типа 2. Разработано конструктивное представление его функции принадлежности. Предложен метод выбора рациональной альтернативы по нечеткому отношению типа 2, доказано существование максимизирующей альтернативы.
Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое отношение типа 2, рациональный выбор.

Generalized problem of decision making in conditions of uncertainty with fuzzy set of nature states is considered. For the setting of the aggregated relation of preference, the operation of fuzzy set intersection of clear relations, the result of which is fuzzy relation of type 2, is used. Structural presentation of its membership function is developed. The method for choice of rational alternative by fuzzy relation of type 2 is offered. Existence of maximizing alternative is proved.
Key words: fuzzy set, fuzzy relation of type 2, rational choice.

Розглядається узагальнена задача прийняття рішень в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи. Для завдання агрегованого відношення переваги використовується операція перетину нечіткої множини чітких відношень, результатом якої є нечітке відношення типу 2. Розроблене конструктивне представлення його функції належності. Запропоновано метод вибору раціональної альтернативи за нечітким відношенням типу 2, доведене існування максимізуючої альтернативи.
Ключові слова: нечітка множина, нечітке відношення типу 2, раціональний вибір.

Введение

Принятие решений часто связано с тем, что исходы (результаты) выбираемых альтернатив (действий) могут носить неопределенный характер. Это означает, что каждой альтернативе может отвечать множество исходов. Проявление неопределенности в принятии решений связано с так называемым [1] множеством состояний природы. Его конкретная интерпретация зависит от постановки задачи (например, спрос на ту или иную продукцию, погода и т.п.).

Задачи принятия решений (ЗПР) достаточно хорошо изучены [1]. Основная идея их решения связана с использованием некоторой дополнительной информации о множестве состояний природы (чаще всего это распределение вероятностей на этом множестве) или (и) с некоторой эвристикой относительно специфики (склонность к осторожному поведению, относительному пессимизму, авантюризму, компромиссу и т.п.) лица, принимающего решение (ЛПР).

Лучше всего изучены и чаще применяются на практике методы принятия решений в задачах с известной функцией полезности ЛПР, которая определена на множестве исходов. Тогда удается построить и оптимизировать так называемую [2] функцию полезности альтернатив, которая уже детерминирована и не зависит от состояний природы.

Разработаны также подходы к решению так называемых [2] обобщенных задач, в которых ЛПР может только сравнивать исходы, а функция полезности либо ему не известна в силу специфики задачи, либо ее сложно или совсем невозможно построить. В этом случае на множестве альтернатив можно построить отношения предпочтения ЛПР, которые характеризуют цель ЛПР, отвечающие различным состояниям природы. Используя известное распределение вероятностей на множестве состояний природы, эти отношения дают возможность построить так называемую [2] функцию интенсивности предпочтения, которая уже не зависит от состояний природы и может быть оптимизирована. Например, в [2] эта идея реализована для совершенно упорядоченных, частично упорядоченных и произвольных асимметричных отношений предпочтения ЛПР.

Целью работы является разработка метода рационального выбора альтернатив в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы в задаче принятия решений с целью ЛПР, заданной при каждом состоянии природы соответствующим отношением предпочтения. Такая постановка расширяет область применения обобщенных ЗПР в условиях неопределенности с четким множеством состояний природы. Потребность в этом возникает тогда, когда ЛПР не может четко указать, какие состояния природы будут влиять на последствия выбора альтернатив в задаче, которая сложилась на момент принятия решений. ЛПР может задать лишь функцию принадлежности нечеткого множества актуальных состояний природы.

Постановка задачи

Предположим, что ЛПР может сравнить любую пару альтернатив x, y из множества X евклидового пространства E при каждом состоянии природы s из универсального множества состояний природы S (для простоты изложения материала будем считать множество S конечным).

Пусть по результатам этих сравнений получена совокупность отношений предпочтения ЛПР R_s, $s \in S$, которые будем считать полными бинарными отношениями. Обозначим $r_s : X \times X \to \{0,1\}$ – характеристическую функцию отношения R_s, т.е.

$$xR_s y \Leftrightarrow r_s(x, y) = 1,\ x\overline{R}_s y \Leftrightarrow r_s(x, y) = 0,\ s \in S. \quad (1)$$

Предположим, что альтернатива x предпочтительнее альтернативы y для ЛПР, если это отношение имеет место при всех состояниях природы. Тогда мы получим известную задачу [1] рационального выбора альтернатив по агрегированному отношению предпочтения $R = \bigcap_{s \in S} R_s$. Общим решением этой задачи считается мно-

жество $ND \subseteq X$ – «максимальных» по отношению предпочтения R альтернатив, которое определяется следующим образом:

$$ND = \{x \in X \mid y\overline{P}x, \forall y \in X\}, \tag{2}$$

где $P = R \setminus R^{-1}$ – отношение доминирования, которое представляет собой асимметричную часть отношения предпочтения R.

Иногда ЛПР не может четко указать, какие состояния природы актуальны в момент принятия решений, но может задать некоторое нечеткое подмножество $\tilde{S} \subseteq S$ этих отношений. Обозначим $\sigma : S \to \{0,1\}$ функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{S}$ состояний природы. Тогда агрегированное отношение предпочтения ЛПР будет задаваться пересечением $\tilde{R} = \bigcap_{s \in \tilde{S}} R_s$ нечеткого множества $\tilde{S}$ четких отношений R_s, $s \in S$. В этом случае задача принятия решений в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы будет состоять в выборе «максимальных» по отношению предпочтения $\tilde{R}$ альтернатив. Для реализации этой идеи определим понятие пересечения нечеткого множества четких отношений в соответствии с подходом, который был предложен в [3].

Пересечение нечеткого множества четких отношений

Для произвольной пары альтернатив $x, y \in X$ рассмотрим отношение доминирования на множестве состояний природы S, которое порождается парами значений характеристической функции $r_s(x, y)$ и функции принадлежности $\sigma(s)$.

Будем говорить, что состояние природы $t \in S$ доминирует состояние природы $s \in S$ для пары альтернатив $x, y \in X$ и обозначать это $t \overset{(x,y)}{\succ} s$, если справедливы такие неравенства: $r_t(x, y) \le r_s(x, y)$, $\sigma(t) \ge \sigma(s)$, и хотя бы одно из них строгое.

Для $\forall x, y \in X$ обозначим: $S^{PO}(x, y) = \{s \in S \mid \nexists t \in S : t \overset{(x,y)}{\succ} s\}$ – множество недоминируемых состояний $s \in S$ и $\tilde{\sigma}(x, y, s) = \{\sigma(i) \mid s \in S^{PO}(x, y); 0 \mid s \notin S^{PO}(x, y)\}$ – функцию принадлежности нечеткого множества с носителем $S^{PO}(x, y)$.

Пересечением нечеткого множества $\tilde{S}$ четких отношений R_s, $s \in S$, в соответствии с [3], будем называть $\tilde{R} = \bigcap_{s \in \tilde{S}} R_s$ – нечеткое отношение типа 2, которое определено на множестве X и задается тройками $(x, y, r(x, y, z))$, где

$r : X \times Y \times Z \to [0,1]$ – функция принадлежности нечеткого отображения $\Re$, выполняющего роль нечеткой функции принадлежности, определенная таким образом:

$$r(x, y, z) = \begin{cases} \max\limits_{s \in S}\{\tilde{\sigma}(x, y, s) \mid r_s(x, y) = z\}, & \exists s \in S:\ r_s(x, y) = z; \\ 0, & r_s(x, y) \ne z,\ \forall s \in S; \end{cases} \tag{3}$$

x, y – пара элементов множества альтернатив X;

z – элемент универсального множества $Z = \{0,1\}$ значений отображения принадлежности $\Re$ нечеткого отношения $\tilde{R}$ типа 2.

Значения нечеткого отображения принадлежности $\Re$ для фиксированной пары альтернатив $x^0, y^0 \in X$ образуют нечеткое подмножество $\Re_Z(x^0, y^0)$ множества $Z = \{0,1\}$ с

функцией принадлежности $r(x^0, y^0, z)$. Значение $r(x^0, y^0, 1)$ можно понимать как степень того, что пара альтернатив x^0, y^0 находится в отношении $\tilde{R}$. Соответственно $r(x^0, y^0, 0)$ – степень непринадлежности пары x^0, y^0 отношению $\tilde{R}$.

С другой стороны, если в отображении $r(x, y, z)$ зафиксировать $z = 1$, то мы получим функцию принадлежности $r(x, y, 1)$ нечеткого множества пар альтернатив x, y, которые находятся в отношении $\tilde{R}$. Аналогично для фиксированного значения $z = 0$ получим нечеткое множество пар альтернатив x, y, которые не находятся в отношении $\tilde{R}$, с функцией принадлежности $r(x, y, 0)$.

Упростить построение отображения $r(x, y, z)$ позволяет следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $R(s)$, $s \in S$, – четкие отношения, которые заданы на множестве X соответствующими характеристическими функциями $r_s(x, y)$, $x, y \in X$, $s \in S$; $\sigma(s)$, $s \in S$, – функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{S}$. Для того чтобы нечеткое отношение $\tilde{R}$ типа 2, которое задано отображением принадлежности $r(x, y, z)$; $x, y \in X$; $z \in \{0,1\}$, отвечало пересечению нечеткого множества $\tilde{S}$ отношений R_s, $s \in S$, т.е. $\tilde{R} = \bigcap_{s \in \tilde{S}} R_s$ необходимо и достаточно, чтоб для $x, y \in X$:

$$r(x,y,0) = \begin{cases} \max\limits_{r_s(x,y)=0} \sigma(s), & \exists s \in S:\ r_s(x,y) = 0, \\ 0, & r_s(x,y) = 1, \quad \forall s \in S, \end{cases}$$
$$r(x,y,1) = \begin{cases} \max\limits_{s \in S} \sigma(s), & r_s(x,y) = 1, \ \forall s \in Arg \max\limits_{t \in S} \sigma(t), \\ 0, & \exists s \in Arg \max\limits_{t \in S} \sigma(t):\ r_s(x,y) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Сначала покажем, что формула (8) эквивалентна следующей:

$$r(x,y,z) = \begin{cases} \max\limits_{s \in S^{PO}(x,y,z)} \sigma(s), & S^{PO}(x,y,z) \neq \varnothing, \\ 0, & S^{PO}(x,y,z) = \varnothing, \end{cases} \tag{5}$$

где $S^{PO}(x,y,z) = \{s \in S \big| \ z = r_s(x,y) = \min\limits_{\sigma(t) \geq \sigma(s)} r_s(x,y),\ \sigma(s) = \max\limits_{r_t(x,y) \leq r_s(x,y)} \sigma(t)\}$. (6)

Отметим, что из (7), (8) очевидно следует, что

$$r(x,y,z) = \begin{cases} \max\limits_{s \in S^{PO}(x,y)} \{\sigma(s) \big| r_s(x,y) = z\}, & r_s(x,y) = z, \\ 0, & r_s(x,y) \neq z. \end{cases} \tag{7}$$

Поэтому для доказательства эквивалентности (8) и (5) достаточно показать, что формула (7) эквивалентна (5). Для этого покажем, что

$$S^{PO}(x,y) = \{s \in S \big| r_s(x,y) = \min_{\sigma(t) \geq \sigma(s)} r_t(x,y),\ \sigma(s) = \max_{r_t(x,y) \leq r_s(x,y)} \sigma(t)\},\ x, y \in X. \tag{8}$$

Пусть для некоторых $x, y \in X$, $s \in S$ выполняется следующее соотношение:

$$r_s(x,y) = \min_{\sigma(t) \geq \sigma(s)} r_t(x,y),\ \sigma(s) = \max_{r_t(x,y) \leq r_s(x,y)} \sigma(t). \tag{9}$$

Предположим противное, что $s \notin S^{PO}(x, y)$. Тогда согласно (3) $\exists l \in S$, для которого $l \overset{(x,y)}{\succ} s$, т.е. $r_l(x,y) < r_s(x,y)$, $\sigma(l) \geq \sigma(s)$ или $r_l(x,y) \leq r_s(x,y)$, $\sigma(l) > \sigma(s)$.

В первом случае получим неравенство $r_l(x,y) < \max\limits_{\sigma(t) \geq \sigma(s)} r_t(x,y)$. Во втором

случае выполнится неравенство $\sigma(l) > \max_{r_t(x,y) \le r_s(x,y)} \sigma(t)$. И первое, и второе неравенства, очевидно, противоречат (9), поэтому получим $s \in S^{PO}(x,y)$.

Пусть $s \in S^{PO}(x,y)$. Предположим противное, что выполняется хотя бы одно из неравенств: $r_s(x,y) > \min_{\sigma(t) \ge \sigma(s)} r_t(x,y)$ или $\sigma(s) < \max_{r_t(x,y) \le r_s(x,y)} \sigma(t)$.

В случае первого неравенства делаем вывод, что $\exists l \in S$, для которого $\sigma(l) \ge \sigma(s)$, $r_l(x,y) < r_s(x,y)$. Тогда $l \overset{(x,y)}{\succ} s$ и согласно (3) $s \notin S^{PO}(x,y)$.

Аналогично во втором случае $\exists p \in S$, для которого $r_p(x,y) < r_s(x,y)$, $\sigma(p) \ge \sigma(s)$. Тогда $p \overset{(x,y)}{\succ} s$ и согласно (3) $s \notin S^{PO}(x,y)$. Таким образом, в обоих случаях получили противоречие, поэтому имеет место равенство (8). Следует отметить, что доказательство равенства (8) можно получить также при использовании критерия оптимальности по Парето [4].

Из (6), (8) очевидно следует равенство $S^{PO}(x,y,z) = S^{PO}(x,y) \bigcup \{s \in S \mid r_s(x,y) = z\}$. Поэтому формула (7) эквивалентна (5). Отсюда формула (8) также эквивалентна (5).

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать эквивалентность (4), (5).

Сначала рассмотрим (4) и (5) при $z = 1$ в двух возможных случаях. Пусть $r_s(x,y) = 0, \forall s \in S$. Тогда согласно (4) $r(x,y,1) = 0$. С другой стороны, из (6) следует, что $S^{PO}(x,y,1) = \varnothing$. Поэтому согласно (5) также получим $r(x,y,1) = 0$.

Во втором случае, пусть $\exists s \in S : r_s(x,y) = 0$. Определим согласно (5) значение $r(x,y,0)$. Для этого в соответствии с (6) построим множество $S^{PO}(x,y,0) = \{s \in S \mid 0 = = r_s(x,y) = \min_{\sigma(t) \ge \sigma(s)} r_t(x,y),\ \sigma(s) = \max_{r_t(x,y)=0} \sigma(t)\}$. Покажем, что $S^{PO}(x,y,0) = \operatorname{Arg} \max_{r_t(x,y)=0} \sigma(t)$. Обозначим $\sigma_0^*(x,y) = \max_{r_t(x,y)=0} \sigma(t)$. Пусть $s \in \operatorname{Arg} \max_{r_t(x,y)=0} \sigma(t)$, тогда $\sigma(s) = \sigma_0^*(x,y)$ и $\min_{\sigma(t) \ge \sigma(s)} r_t(x,y) = \min\{ \min_{\sigma(t) = \sigma_0^*(x,y)} r_t(x,y), \min_{\sigma(t) > \sigma_1^*(x,y)} r_t(x,y)\} = \min\{0, \min_{\sigma(t) > \sigma_0^*(x,y)} r_t(x,y)\} = 0 = r_s(x,y)$.

Отсюда очевидно следует, что $s \in S^{PO}(x,y,0)$.

Далее сравним (4) и (5) при $z = 1$ в двух возможных случаях. Обозначим $\sigma_1^* = \max_{t \in S} \sigma(t)$, $S^* = \operatorname{Arg} \max_{t \in S} \sigma(t)$. Сначала пусть $r_s(x,y) = 1$, $\forall s \in S^*$. Тогда согласно (4) $r(x,y,1) = \sigma_1^*$. Определим значение $r(x,y,1)$ по формуле (5). Для этого построим согласно с (6) множество

$$S^{PO}(x,y,1) = \{s \in S \mid 1 = r_s(x,y) = \min_{\sigma(t) \ge \sigma(s)} r_t(x,y),$$
$$\sigma(s) = \max_{t \in S} \sigma(t)\} = \{s \in S^* \mid 1 = r_s(x,y) = \min_{t \in S^*} r_t(x,y)\} = S^*.$$

Отсюда согласно (4) $r(x,y,1) = \sigma_1^*$. Таким образом, значения (4) и (5) при $z = 1$ совпадают.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\exists s \in S^* : r_s(x,y) = 0$. Тогда согласно (4) $r(x,y,1) = 0$. Определим значение $r(x,y,1)$ согласно (5). На основании (6)

$$S^{PO}(x,y,1) = \{s \in S \mid 1 = r_s(x,y) = \min_{\sigma(t) \ge \sigma(s)} r_t(x,y), \sigma(s) = \max_{t \in S} \sigma(t) = \sigma_1^*\} = \{s \in S^* \mid 1 = r_t(x,y) =$$
$$= \min_{j \in S^*} r_t(x,y) = 0\} = \varnothing.$$

Отсюда согласно (5) $r(x,y,1)=0$, а поэтому формулы (8), (4) – эквивалентны при $z=1$. Теорема доказана.

Выбор рационального решения

Если обобщить понятие общего решения (множество ND согласно (2)) задачи принятия решений в условиях неопределенности на случай нечеткого множества состояний природы, то необходимо построить множество «максимальных» по отношению предпочтения $\tilde{R}$ альтернатив.

Отображение принадлежности нечеткого отношения типа 2 $\tilde{P}=\tilde{R}\setminus\tilde{R}^{-1}=\tilde{R}\bigcap\overline{\tilde{R}^{-1}}$, которое будет асимметричной частью отношения предпочтения $\tilde{R}$, в соответствии с операциями над нечеткими множествами типа 2 [5], будет задаваться функцией $p(x,y,z)=\max_{\substack{z_1,z_2\in\{0,1\},\\ z=\min\{z_1,z_2\}}}\min\{r(x,y,z_1),r(y,x,1-z_2)\}$, $x,y\in X$, $z\in\{0,1\}$. Следует отметить, что функции $p(x,y,1)$ и $p(x,y,0)$, $x,y\in X$, будут определять нечеткие множества пар альтернатив, которые находятся и, соответственно, не находятся в отношении доминирования. Поэтому логично определить понятие общего решения исходной задачи исходя из следующих рассуждений.

Поскольку величина $p(x,y,0)$ есть степень, с которой альтернатива y не доминируется x, то при фиксированной переменной $y\in X$ определенную на X функцию $p(y,x,0)$ можно считать функцией принадлежности нечеткого множества всех альтернатив x, которые не доминируются альтернативой y. Отсюда следует, что подмножество альтернатив, каждая из которых не доминируется ни одной из альтернатив множества X, может быть задано функцией принадлежности $\min_{y\in X} p(y,x,0)$, $x\in X$.

Нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu: X\to[0,1]$ вида

$$\mu(x)=\min_{y\in X} p(y,x,0),\ x\in X,$$

назовем множеством нечетких слабо эффективных альтернатив и обозначим F, а $\operatorname{supp}(F)=\{x\in X \mid \mu(x)>0\}$ назовем носителем F.

Поскольку ЛПР, как правило, интересует какая-либо единственная альтернатива, то ему стоит выбирать нечеткую слабо эффективную альтернативу x^* с максимальной степенью недоминируемости $\mu(x)$.

Альтернативу $x^*\in X$ будем называть максимизирующей нечеткой слабо эффективной альтернативой задачи принятия решений в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы, если $\mu(x^*)=\max_{x\in X}\mu(x)$.

Поскольку функция $p(x,y,z)$ для $\forall x\in X$, $\forall z\in\{0,1\}$, может принимать лишь конечные значения из конечного множества $\{0\}\bigcup\{\sigma(s), s\in S\}$, то вполне понятно, что в задаче принятия решений в условиях неопределенности с конечным нечетким множеством состояний природы всегда существует максимизирующая нечеткая слабо эффективная альтернатива.

Попробуем сформулировать задачу математического программирования, решением которой была бы максимизирующая нечеткая слабо эффективная альтернатива. Для этого представим функцию принадлежности $p(x,y,0)$ нечеткого множества недоминируемых альтернатив в более простом виде.

Обозначим $P_s = R_s \setminus R_s^{-1}$ – отношение доминирования, которое представляет собой асимметричную часть отношения предпочтения R_s ЛПР при состоянии природы $s \in S$.

Предположим, что $\forall s \in S \quad xP_s y$, т.е. $r_s(x,y)=1,\ r_s(y,x)=0$. Тогда согласно формулам (4) $r(x,y,0)=0$, $r(x,y,1)=\max_{s\in S}\sigma(s)$, $r(y,x,0)=\max_{s\in S}\sigma(s)$, $r(y,x,1)=0$. Отсюда из (10) следует, что $p(x,y,0)=\max\{0,0,0\}=0$.

Предположим, что для $\forall s \in S \quad yP_s x$, т.е. $r_s(x,y)=0,\ r_s(y,x)=1$. Тогда согласно формулам (4) $r(x,y,0)=\max_{s\in S}\sigma(s)$, $r(x,y,1)=0$, $r(y,x,0)=0$, $r(y,x,1)=\max_{s\in S}\sigma(s)$. Отсюда из (10) следует, что $p(x,y,0)=\max\{\max_{s\in S}\sigma(s),0,0\}=\max_{s\in S}\sigma(s)$.

Предположим, что $\exists s \in S:\ x\overline{P}_s y \wedge y\overline{P}_s x$. Обозначим $S^* = \operatorname{Arg}\max_{t\in S}\sigma(t)$ и рассмотрим следующие три возможных варианта.

1. Предположим, что для $\forall s \in S^* \quad xP_s y$, т.е. $r_s(x,y)=1,\ r_s(y,x)=0$. Тогда согласно формулам (4) $r(x,y,0)=\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s)$, $r(x,y,1)=\max_{s\in S}\sigma(s)$, $r(y,x,1)=0$. Поскольку $\exists s\in S^*:\ r_s(y,x)=0$, то $r(y,x,0)=\max_{r_S(y,x)=0}\sigma(s)=\max_{s\in S}\sigma(s)$. Отсюда очевидно следует $p(x,y,0)=\max\{0,\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s),0\}=\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s)$.

2. Предположим, что для $\forall s \in S^* \quad yP_s x$, т.е. $r_s(x,y)=0,\ r_s(y,x)=1$. Тогда согласно формулам (4) $r(x,y,0)=\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s)$, $r(x,y,1)=0$, $r(y,x,0)=\max_{r_S(y,x)=0}\sigma(s)$, $r(y,x,1)=\max_{s\in S}\sigma(s)$. Отсюда очевидно следует, что $p(x,y,0)=\max\{\max_{r_s(x,y)=0}\sigma(s),\ \min\{\max_{r_s(x,y)=0}\sigma(s),\ \max_{r_s(y,x)=0}\sigma(s)\},0\}=$ $\max\{\max_{r_s(x,y)=0}\sigma(s),\min\{\max_{r_s(x,y)=0}\sigma(s),\max_{r_s(y,x)=0}\sigma(s)\}\}$. Поскольку $\max\{a,\min\{a,b\}\}=a$, то $p(x,y,0)=\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s)$.

3. Предположим, что $\exists s\in S^*:\ x\overline{P}_s y \wedge y\overline{P}_s x$. Тогда согласно формулам (4) $r(x,y,1)=0$, $r(y,x,1)=0$, $r(x,y,0)=\max_{r_s(x,y)=0}\sigma(s)$. Поскольку $\exists s\in S^*:\ r_s(y,x)=0$, то $r(y,x,0)=\max_{r_s(y,x)=0}\sigma(s)=\max_{s\in S}\sigma(s)$. Отсюда $p(x,y,0)=\max\{0,\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s),0\}=\max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s)$.

Из рассмотренных выше случаев очевидно следует, что

$$p(x,y,0)=\begin{cases}\max_{s\in S}\sigma(s), & \forall s\in S \ \ yP_s x,\\ 0, & \forall s\in S \ \ xP_s y,\\ \max_{r_S(x,y)=0}\sigma(s), & \exists s\in S: x\overline{P}_s y\wedge y\overline{P}_s x.\end{cases} \tag{11}$$

Теорема 2. Максимизирующая нечеткая слабо эффективная альтернатива задачи принятия решений в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы является решением задачи:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in X}\max_{s\in S}\{\sigma(s)\,|\ r_s(y,x)=0\}. \tag{12}$$

Если задача (12) имеет единственное решение, то оно является максимизирующей нечеткой слабо эффективной альтернативой.

Доказательство. Пусть x^*, y^*, s^* образуют решение задачи (12). Сначала покажем, что $x^*\in ND$. Действительно, из (12) следует, что $\sigma(s^*)\ge\sigma(s),\ \forall s\in M(x^*,y^*)$,

где с учетом (1) множество $M(x^*, y^*) = \{s \in S \mid y^* \bar{R}_s x^*\}$. Причем

$$M(x^*, y) \supseteq M(x^*, y^*) \supset M(x, y^*),\ \forall x, y \in X. \qquad (13)$$

Рассмотрим два случая. Предположим $M(x^*, y^*) = S$. Тогда $y^* \bar{R}_s x^*$, $\forall s \in S$. Поскольку $M(x^*, y) \supseteq M(x^*, y^*)$, $\forall y \in X$, то $y\bar{R}_s x^*$, $\forall s \in S$, $\forall y \in X$. Поскольку $P = R \setminus \bar{R}^{-1} \subseteq R$, а $R = \bigcap_{s \in S} R_s$, то для $\forall y \in X$ $y\bar{R}x^*$ и, следовательно, $y\bar{P}x^*$. Отсюда, согласно с (2), $x^* \in ND$. Теперь пусть $M(x^*, y^*) \subset S$. Предположим противное, что $x^* \notin ND$. Тогда существует альтернатива $v \in X$, которая vPx^*. Поскольку $P \subseteq R$, а $R = \bigcap_{s \in S} R_s$, то $vR_s x^*$, $\forall s \in S$. Отсюда $M(v, y^*) = \{s \in S \mid y^* \bar{R}_s v\} = S \supseteq M(x^*, y^*)$, т.е. $M(v, y^*) \supseteq M(x^*, y^*)$. Получили противоречие с (13). Таким образом, $x^* \in ND$.

Предположим противное, что $x^* \notin F$. Тогда согласно определению $\mu(x^*) = \min_{y \in X} p(y, x, 0) = 0$. Поэтому $\exists y \in X$, для которого $q(y, x^*, 0) = 0$. Тогда из (11) следует, что $yP_s x^*$, $\forall s \in S$. Поэтому yPx^*. Отсюда несложно убедиться, что $x^* \notin ND$. Получили противоречие. Таким образом, $x^* \in F$.

Пусть $x \in \mathrm{supp}(F)$. Покажем, что x удовлетворяет $\min_{y \in X} \max_{s \in S} \{\sigma(s) \mid r_s(y, x) = 0\}$. Сначала покажем, что $\forall y \in X$ $\exists s \in S$ $y\bar{P}_s x$. Предположим противное, что $\exists y \in X$, для которого $y\bar{P}_s x$ для $\forall s \in S$. Тогда из (11) следует, что $q(y, x, 0) = 0$. Следовательно $\mu(x) = \min_{y \in X} p(y, x, 0) = 0$. Поэтому $x \notin \mathrm{supp}(F)$. Получили противоречие.

Таким образом, $\forall y \in X$ $\exists s \in S$ $y\bar{P}_s x$. При этом для $\forall y \in X$ возможны два варианта: либо $\forall s \in S$ $xP_s y$, либо $\exists s \in S$ $x\bar{P}_s y$. Тогда согласно с (10) получим: в первом случае, $p(y, x, 0) = \max_{s \in S} \sigma(s)$; во втором случае, $p(y, x, 0) = \max_{r_s(y,x)=0} \sigma(s)$. Кроме этого, согласно с (1): в первом случае, поскольку $\forall s \in S$ $R_s = \bar{P}_s^{-1}$, то $y\bar{R}_s x$, и поэтому получим $r_s(y, x) = 0$ для $\forall s \in S$; во втором случае, $\exists s \in S$ $yR_s x$, что означает $r_s(y, x) = 0$. Отсюда вполне понятно, что в общем случае можно записать $p(y, x, 0) = \max_{r_s(y,x)=0} \sigma(s)$ для $\forall y \in X$. Поскольку по определению $\mu(x) = \min_{y \in X} p(y, x, 0)$, то $\mu(x) = \min_{y \in X} \max_{s \in S} \{\sigma(s) \mid r_s(y, x) = 0\}$. Тогда очевидно, что альтернатива x^*, удовлетворяющая условию $\mu(x^*) = \max_{x \in X} \mu(x)$, будет решением задачи (12). Теорема доказана.

Выводы

В заключении следует отметить, что рассмотренный выше подход к решению ЗПР в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы может быть естественным образом обобщен на случай бесконечного множества. Кроме этого, известные методы дефазификации задач принятия решения в условиях нечеткой информации [6] легко позволят обобщить разработанный в статье метод на случай нечеткого множества альтернатив и нечетких отношений предпочтения ЛПР.

Литература

1. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко – К. : ВПЦ «Київський університет», 2010. – 336 с.

2. Кирута А.Я. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах (вероятностный подход) / Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б.; отв. ред. Н.Н. Воробьев. – Л. : Наука, 1980. – 167 с.
3. Мащенко С.О. Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия / С.О. Мащенко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010, вып.159. – С. 19-29.
4. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. - М. : Физматлит, 2007 (Чебоксары). – 255 с.
5. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений / Л.А. Заде // Математика сегодня. – М. : Знание, 1974. – С. 5-49.
6. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / Орловский С.А. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

Literatura

1. Voloshin O.F. Modeli ta metody pryjnjattja rishen'. K.: VPTs "Kyivs'kyi universytet". 2010. 336 p.
2. Kiruta A.Ya. Optimal'nyj vybor raspredelenij v slozhnyh social'no-jekonomicheskih zadachah (verojatnostnyj podhod). L.: Nauka, 1980. 167 p.
3. Mashchenko S.O. Kibernetika i vychislitel'naja tehnika. 2010. V.159. P. 19-29.
4. Podinovskiy V.V. Pareto-optimal'nye reshenija mnogokriterial'nyh zadach. M.: Fizmatlit. 2007 (Cheboksary). 255 p.
5. Zadeh L.A. Matematika segodnja. M.: Znanie. 1974. S. 5-49.
6. Orlovskij S.A. Problemy prinjatija reshenij pri nechetkoj ishodnoj informacii. M.: Nauka. 1981. 208 s.

S.O. Mashchenko

The Generalized Problem of Decision Making in Conditions of Uncertainty with the Fuzzy Set of Nature States

In the work, generalized problem of rational choice of alternatives in conditions of uncertainty with fuzzy set of nature states with the purpose of the decision making person (DMP) set by the relations of preference is considered. Needs for such problems arise in the following cases: First, when DMP can compare the results of decision making to their own preference in pairs only and function of their utility to him/her is either not known by virtue of the task specificity, or it is difficult or it is quite impossible to build it. Secondly, when DMP cannot expressly indicate what states of nature will affect the consequences of the choice of alternatives in a task, which has been formed at the moment of the decision making. In this case, it can only set the function of membership to fuzzy set of essential states of nature.

As a basis of the method for decision of this problem, the notion of maximal element of a set by relation of preference, which is generalized in case of decision making in the conditions of uncertainty with fuzzy set of nature states, is used. For the aggregated relation of preference task, the original operation for the relations is offered, i.e. intersection of a fuzzy set of clear relations. It is shown, that the fuzzy relation of the type 2 is the result of this operation. A structural presentation of its membership function has been developed. The method of rational alternative choice according to the fuzzy relation of the type 2 is offered. The method consists of the choice of alternative, which maximizes the membership function of alternative fuzzy set, which are non-dominated by the strong fuzzy relation of preference of the type 2. The existence of a maximizing alternative in case of finite nature states set is shown. The contraction of the generalized alternative rational choice problem in the conditions of uncertainty with fuzzy set of nature states to the special kind mathematical programming minimax problem is grounded.

Статья поступила в редакцию 20.12.2011.